अध्याय 2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

2.1 समग्र अवलोकन (Overview)

2.1.1 *प्रतिलोम फलन*

फलन 'f' के प्रतिलोम का अस्तित्व केवल तभी होता है जब फलन एकैकी तथा आच्छादक हो अर्थात् एकैकी आच्छादी हो क्योंकि त्रिकोणमितीय फलन बहुएक संगति (many-one) फलन होते हैं इसलिए हम उनके प्रांतों तथा परिसरों को इस प्रकार प्रतिबंधित करते हैं कि वे एकैकी तथा आच्छादक हो जाए और फिर हम उनका प्रतिलोम ज्ञात करते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांत तथा परिसर (मुख्य मान शाखा) नीचे दिए गए हैं।

फलन	प्रांत	परिसर (मुख्य मान शाखा)
$y = \sin^{-1}x$	$[-1,1]$	$\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1}x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$y = \text{cosec}^{-1}x$	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2} - \{0\}$
$y = \sec^{-1}x$	$\mathbf{R}-(-1,1)$	$[0,\pi] - \frac{\pi}{2}$
$y = \tan^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}$
$y = \cot^{-1}x$	$\mathbf{R}$	$(0,\pi)$

21/04/2018

☛ टिप्पणी

(i) $\sin^{-1}x$ से $(\sin x)^{-1}$ की भ्रांति नहीं होनी चाहिए। वास्तव में $\sin^{-1}x$ एक कोंण है जिसके sine का मान x है। यही तथ्य अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के लिए भी सत्य है।

(ii) θ के सबसे कम (न्यूनतम) संख्यात्मक मान चाहे वह धनात्मक हो या ऋणात्मक हो, को फलन का मुख्य मान कहते हैं।

(iii) जब कभी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन की किसी विशेष शाखा का उल्लेख न हो तो हमारा तात्पर्य मुख्य शाखा से होता है। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का वह मान जो उसकी मुख्य शाखा के परिसर में स्थित होता है उसे मुख्य मान कहते हैं।

2.1.2 त्रिकोणमितीय फलनों का आलेख

किसी प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन का आलेख मूल फलन के आलेख में x तथा y-अक्षों का परस्पर विनिमय करके प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात्, यदि (a, b) फलन के आलेख में एक बिंदु है तो (b, a) प्रतिलोम फलन के ग्राफ का संगत बिंदु हो जाता है।

यह दिखाया जा सकता है कि प्रतिलोम फलन के आलेख, रेखा $y = x$ के परित: संगत मूल फलन के आलेख को दर्पण प्रतिबिंब (mirror image) अर्थात् परावर्तन (reflection) के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

2.1.3 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म

1. $\sin^{-1}(\sin x) = x$: $x \in \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$\cos^{-1}(\cos x) = x$: $x \in [0, \pi]$

$\tan^{-1}(\tan x) = x$: $x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\cot^{-1}(\cot x) = x$: $x \in (0, \pi)$

$\sec^{-1}(\sec x) = x$: $x \in [0, \pi] - \frac{\pi}{2}$

$\text{cosec}^{-1}(\text{cosec}\, x) = x$: $x \in \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} - \{0\}$

2. $\sin(\sin^{-1} x) = x$: $x \in [-1, 1]$

$\cos(\cos^{-1} x) = x$: $x \in [-1, 1]$

$\tan(\tan^{-1} x) = x$: $x \in \mathbf{R}$

$\cot(\cot^{-1} x) = x$: $x \in \mathbf{R}$

$\sec(\sec^{-1} x) = x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\text{cosec}(\text{cosec}^{-1} x) = x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

3. $\sin^{-1} \frac{1}{x} = \text{cosec}^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\cos^{-1} \frac{1}{x} = \sec^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\tan^{-1} \frac{1}{x} = \cot^{-1} x$: $x > 0$

$= -\pi + \cot^{-1} x$: $x < 0$

4. $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$: $x \in [-1,1]$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$: $x \in [-1,1]$

$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$: $x \in \mathbf{R}$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$: $x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

$\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1} x$: $x \in \mathbf{R} - (-1,1)$

5. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$: $x \in [-1,1]$

$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$: $x \in \mathbf{R}$

$\sec^{-1} x + \text{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}$: $x \in \mathbf{R} - [-1,1]$

6. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$: $xy < 1$

$\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$; $xy > -1$

7. $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$: $-1 \le x \le 1$

$2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$: $x \ge 0$

$2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$: $-1 < x < 1$

2.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय (S.A.)

उदाहरण 1 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ के लिए $\cos^{-1} x$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल यदि $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$, तब $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

हम यहाँ मुख्य शाखा पर विचार कर रहे हैं इसलिए $\theta \in [0, \pi]$. पुनः $\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ से हम जान गए कि θ प्रथम चतुर्थांश में है इसलिए $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

उदाहरण 2 $\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)$ को परिकलित कीजिए।

हल $\tan^{-1}\left(\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

उदाहरण 3 $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{\pi}{6}.$$

उदाहरण 4 $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan^{-1}\left(\tan\frac{9\pi}{8}\right) = \tan^{-1}\tan\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{\pi}{8}$$

उदाहरण 5 $\tan(\tan^{-1}(-4))$ को परिकलित कीजिए।

हल क्योंकि $x \in \mathbf{R}$ के सभी मानों के लिए $\tan(\tan^{-1}x) = x$, है इसलिए $\tan(\tan^{-1}(-4)) = -4$.

उदाहरण 6 $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2) = \tan^{-1}\sqrt{3} - [\pi - \sec^{-1}2]$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi + \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

उदाहरण 7 $\sin^{-1}\cos\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\sin^{-1}\cos\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin^{-1}\cos\frac{\pi}{3} = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$

उदाहरण 8 सिद्ध कीजिए कि $\tan(\cot^{-1}x) = \cot(\tan^{-1}x)$. कारण सहित बताइए कि क्या यह x के सभी मानों के लिए सत्य है।

हल मान लीजिए $\cot^{-1}x = \theta$. तब $\cot\theta = x$

या, $\tan\frac{\pi}{2} - \theta = x \Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta$ या $\tan(\cot^{-1}x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}x\right) = \cot(\tan^{-1}x)$

इसलिए $\tan(\cot^{-1}x) = \tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}x\right) = \cot(\tan^{-1}x)$

यह समता x के सभी मानों के लिए सत्य है क्योंकि $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\tan^{-1}x$ तथा $\cot^{-1}x$ सत्य है।

उदाहरण 9 $\sec\left(\tan^{-1}\frac{y}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\tan^{-1}\frac{y}{2} = \theta$, जहाँ $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. इसलिए, $\tan\theta = \frac{y}{2}$,

जिससे $\sec\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}$ प्राप्त होता है।

इसलिए, $\sec\left(\tan^{-1}\frac{y}{2}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{4+y^2}}{2}.$

उदाहरण 10 tan $(\cos^{-1}x)$ का मान ज्ञात कीजिए और फिर $\tan \cos^{-1}\frac{8}{17}$ परिकलित कीजिए।

हल मान लीजिए $\cos^{-1}x = \theta$, तब $\cos\theta = x$, जहाँ $\theta \in [0,\pi]$

इसलिए $$\tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

अत: $$\tan\left(\cos^{-1}\frac{8}{17}\right) = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

उदाहरण 11 $\sin\ 2\cot^{-1}\frac{-5}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $\cot^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right) = y$. तब $\cot y = \frac{-5}{12}$

अब $$\sin\ 2\cot^{-1}\frac{-5}{12} = \sin 2y$$

$$= 2\sin y\cos y = 2\ \frac{12}{13}\ \frac{-5}{13} \quad \left[\text{क्योंकि } \cot y<0, \text{ so } y\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\right]$$

$$= \frac{-120}{169}$$

उदाहरण 12 $\cos\ \sin^{-1}\frac{1}{4}+\sec^{-1}\frac{4}{3}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल $$\cos\ \sin^{-1}\frac{1}{4}+\sec^{-1}\frac{4}{3} = \cos\left[\sin^{-1}\frac{1}{4}+\cos^{-1}\frac{3}{4}\right]$$

$$= \cos\ \sin^{-1}\frac{1}{4}\ \cos\ \cos^{-1}\frac{3}{4}\ -\sin\ \sin^{-1}\frac{1}{4}\ \sin\ \cos^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{1-\ \frac{1}{4}^{\ 2}}\ -\frac{1}{4}\sqrt{1-\ \frac{3}{4}^{\ 2}}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{15} - \sqrt{7}}{16}$$

दीर्घ उत्तरीय उत्तर (L.A.)

उदाहरण 13 सिद्ध कीजिए कि $2\sin^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{17}{31} = \frac{\pi}{4}$

हल मान लीजिए $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \theta$, तब $\sin\theta = \frac{3}{5}$, जहाँ $\theta \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

इस प्रकार $\tan\theta = \frac{3}{4}$, जिससे $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ प्राप्त होता है।

इसलिए $2\sin^{-1}\frac{3}{5} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$

$$= 2\theta - \tan^{-1}\frac{17}{31} \quad = 2\tan^{-1}\frac{3}{4} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2.\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}\right) - \tan^{-1}\frac{17}{31} = \tan^{-1}\frac{24}{7} - \tan^{-1}\frac{17}{31}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{24}{7} - \frac{17}{31}}{1 + \frac{24}{7}.\frac{17}{31}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि

$$\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18 = \cot^{-1}3$$

हल दिया है

$\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18$

$$= \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} \quad (\text{क्योंकि } x > 0 \text{ के लिए } \cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x})$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{18} \qquad \left(\text{क्योंकि } x\,.\,y = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8} < 1\right)$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{11}+\tan^{-1}\frac{1}{18} = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{18}}{1-\frac{3}{11}\times\frac{1}{18}}\right) \qquad (\text{क्योंकि } xy < 1)$$

$$= \tan^{-1}\frac{65}{195} \qquad = \tan^{-1}\frac{1}{3} \qquad = \cot^{-1} 3$$

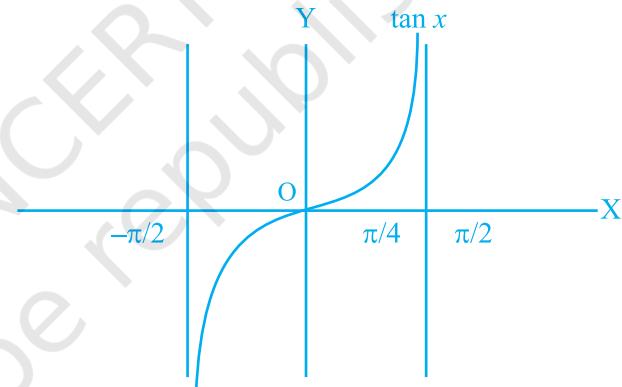
उदाहरण 15 $\tan 1$ तथा $\tan^{-1} 1$ में से कौन सा बड़ा है?

हल आकृति 2.1 से हम देखते हैं कि अंतराल $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ में $\tan x$ वर्धमान फलन है। क्योंकि

$$1 > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan 1 > \tan\frac{\pi}{4}$$

अतः, $\tan 1 > 1$

$$\Rightarrow \qquad \tan 1 > 1 > \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad \tan 1 > 1 > \tan^{-1}(1).$$

आकृति 2.1

उदाहरण 16 $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)+\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$ का मान ज्ञात कीजिए

हल माना $\tan^{-1}\frac{2}{3} = x$ और $\tan^{-1}\sqrt{3} = y$ इसलिए $\tan x = \frac{2}{3}$ और $\tan y = \sqrt{3}$

अतः, $$\sin\left(2\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)+\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$$

$$= \sin(2x) + \cos y$$

$$= \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = \frac{2.\frac{2}{3}}{1+\frac{4}{9}} + \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{12}{13} + \frac{1}{2} = \frac{37}{26}.$$

उदाहरण 17 $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, x > 0$ को x के लिए हल कीजिए

हल दिए गए समीकरण से, $2\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \tan^{-1}x$

$$\Rightarrow \quad 2\left[\tan^{-1}1 - \tan^{-1}x\right] = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\tan^{-1}x \Rightarrow \frac{\pi}{6} = \tan^{-1}x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

उदाहरण 18 x के वे मान ज्ञात कीजिए जो समीकरण $\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1}x$ को संतुष्ट करते हैं।

हल दिए गए समीकरण से हमें प्राप्त होता है कि

$$\sin[\sin^{-1}x + \sin^{-1}(1-x)] = \sin(\cos^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \sin(\sin^{-1}x)\cos(\sin^{-1}(1-x)) + \cos(\sin^{-1}x)\sin(\sin^{-1}(1-x)) = \sin(\cos^{-1}x)$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1-(1-x)^2} + (1-x)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{2x-x^2} + \sqrt{1-x^2}(1-x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\sqrt{2x-x^2} - \sqrt{1-x^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ या $2x - x^2 = 1 - x^2$

$\Rightarrow x = 0$ या $x = \frac{1}{2}$.

उदाहरण 19 समीकरण $\sin^{-1}6x + \sin^{-1} 6\sqrt{3}\,x = -\frac{\pi}{2}$ को हल कीजिए।

हल दिए गए समीकरण को $\sin^{-1} 6x = -\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} 6\sqrt{3}\,x$ के रूप में लिख सकते हैं।

$$\Rightarrow \quad \sin (\sin^{-1} 6x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} 6\sqrt{3}\,x\right)$$

$$\Rightarrow \quad 6x = -\cos (\sin^{-1} 6\sqrt{3}\,x)$$

$$\Rightarrow \quad 6x = -\sqrt{1-108x^2}$$

वर्ग करने पर प्राप्त होता है $36x^2 = 1 - 108x^2$

$$\Rightarrow \quad 144x^2 = 1 \qquad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{12}$$

ध्यान दीजिए कि केवल $x = -\frac{1}{12}$ ही समीकरण का हल है क्योंकि $x = \frac{1}{12}$ इसे संतुष्ट नहीं करता है।

उदाहरण 20 दर्शाइए कि

$$2\tan^{-1}\left\{\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\beta}\right)$$

हल $$\text{L.H.S.} = \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}.\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\right] \quad \left(\text{क्योंकि } 2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}\right)}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{\beta}{2}\right)^2-\tan^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\tan\frac{\beta}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}\left(1-\tan^2\frac{\beta}{2}\right)}{\left(1+\tan^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)+2\tan\frac{\beta}{2}\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\;\dfrac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\sin\beta}\right) \quad = \text{R.H.S.}$$

बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

प्रश्न 21 से 41 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

उदाहरण 21 निम्न में से कौन सा $\tan^{-1}$ की मुख्य मान शाखा है?

(A) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\{0\}$ (D) $(0, \pi)$

हल सही उत्तर (A) है।

उदाहरण 22 $\sec^{-1}$ की मुख्य मान शाखा है।

(A) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$ (B) $[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

हल सही उत्तर (B) है।

उदाहरण 23 मुख्य मान शाखा के अतिरिक्त $\cos^{-1}$ की एक अन्य शाखा है

(A) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (B) $[\pi, 2\pi]-\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ (C) $(0, \pi)$ (D) $[2\pi, 3\pi]$

हल सही उत्तर (D) है।

उदाहरण 24 $\sin^{-1}\left(\cos\left(\frac{43\pi}{5}\right)\right)$ का मान है

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $-\frac{\pi}{10}$

हल सही उत्तर (D) है। क्योंकि $\sin^{-1}\left(\cos\frac{40\pi+3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\cos\left(8\pi+\frac{3\pi}{5}\right)$

$$= \sin^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{5}\right)\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}.$$

उदाहरण 25 व्यंजक $\cos^{-1}[\cos(-680°)]$ का मान है

(A) $\frac{2\pi}{9}$ (B) $\frac{-2\pi}{9}$ (C) $\frac{34\pi}{9}$ (D) $\frac{\pi}{9}$

हल सही उत्तर (A) है क्योंकि $\cos^{-1}(\cos(680°)) = \cos^{-1}[\cos(720° - 40°)]$

$$= \cos^{-1}[\cos(40°)] = 40° = \frac{2\pi}{9}.$$

उदाहरण 26 $\cot(\sin^{-1}x)$ का मान है

(A) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ (B) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

हल सही उत्तर (D) है। मान लीजिए $\sin^{-1}x = \theta$, तब $\sin\theta = x$

$$\Rightarrow \qquad \text{cosec}\ \theta = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \text{cosec}^2\theta = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

उदाहरण 27 यदि किसी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\tan^{-1}x = \frac{\pi}{10}$ है तो $\cot^{-1}x$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) $\frac{4\pi}{5}$

हल सही उत्तर (B) है। हम जानते हैं कि $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ इसलिए $\cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$

$$\Rightarrow \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} = \frac{2\pi}{5}.$$

उदाहरण 28 $\sin^{-1} 2x$ का प्रांत है

(A) [0, 1] (B) [– 1, 1] (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) [–2, 2]

हल सही उत्तर (B) है। मान लीजिए $\sin^{-1}2x = \theta$ या $2x = \sin\theta$.

अब $-1 \le \sin\theta \le 1$, अर्थात् $-1 \le 2x \le 1$ जिससे $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 29 $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान है

(A) $-\frac{2\pi}{3}$ (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{4\pi}{3}$ (D) $\frac{5\pi}{3}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि

$$\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = \sin^{-1}\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

उदाहरण 30 $(\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2$ का क्रमशः अधिकतम तथा न्यूनतम मान है

(A) $\frac{5\pi^2}{4}$ तथा $\frac{\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{-\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi^2}{4}$ तथा $\frac{-\pi^2}{4}$ (D) $\frac{\pi^2}{4}$ तथा 0

हल सही उत्तर (A) है। हम जानते हैं कि

$$(\sin^{-1}x)^2 + (\cos^{-1}x)^2 = (\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)^2 - 2\sin^{-1}x \cos^{-1}x$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\sin^{-1}x\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}x\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \pi\sin^{-1}x + 2\left(\sin^{-1}x\right)^2$$

$$= 2\left[\left(\sin^{-1}x\right)^2 - \frac{\pi}{2}\sin^{-1}x + \frac{\pi^2}{8}\right]$$

$$= 2\left[\left(\sin^{-1}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right].$$

इस प्रकार, न्यूनतम मान $2\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$ अर्थात् $\frac{\pi^2}{8}$ है तथा अधिकतम मान $2\left[\left(\frac{-\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]$,

अर्थात् $\frac{5\pi^2}{4}$ है।

उदाहरण 31 यदि $\theta = \sin^{-1}(\sin(-600°))$, तब θ का मान है

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{-2\pi}{3}$

हल सही उत्तर (A) है क्योंकि

$$\sin^{-1}\sin\left(-600 \times \frac{\pi}{180}\right) = \sin^{-1}\sin\left(\frac{-10\pi}{3}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left[-\sin\left(4\pi - \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

उदाहरण 32 फलन $y = \sin^{-1}(-x^2)$ का प्रांत है

(A) [0, 1] (B) (0, 1) (C) [–1, 1] (D) ϕ

हल सही उत्तर (C) है क्योंकि $y = \sin^{-1}(-x^2) \Rightarrow \sin y = -x^2$

अर्थात् $-1 \le -x^2 \le 1$ (क्योंकि $-1 \le \sin y \le 1$)

$\Rightarrow 1 \ge x^2 \ge -1$

$\Rightarrow 0 \le x^2 \le 1$

$\Rightarrow |x| \le 1$ या $-1 \le x \le 1$

उदाहरण 33 $y = \cos^{-1}(x^2 - 4)$ का प्रांत है

(A) [3, 5] (B) [0, π]

(C) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cap \left[\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right]$ (D) $\left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$

हल सही उत्तर (D) है क्योंकि $y = \cos^{-1}(x^2 - 4) \Rightarrow \cos y = x^2 - 4$

अर्थात् $-1 \le x^2 - 4 \le 1$ (क्योंकि $-1 \le \cos y \le 1$)

$\Rightarrow 3 \le x^2 \le 5$

$\Rightarrow \sqrt{3} \le |x| \le \sqrt{5}$

$\Rightarrow x \in \left[-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, \sqrt{5}\right]$

उदाहरण 34 $f(x) = \sin^{-1}x + \cos x$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत है

(A) [–1, 1] (B) [–1, π + 1] (C) $(-\infty, \infty)$ (D) ϕ

हल सही उत्तर (A) है। क्योंकि फलन cos का प्रांत **R** है तथा $\sin^{-1}$ का प्रांत [–1, 1] है। इसलिए $f(x) = \cos x + \sin^{-1}x$ का प्रांत $\mathbf{R} \cap [-1, 1]$, अर्थात् [–1, 1] है।

उदाहरण 35 $\sin(2\sin^{-1}(\cdot 6))$ का मान है

(A) ·48 (B) ·96 (C) 1·2 (D) sin 1·2

हल सही उत्तर (A) है। यदि $\sin^{-1}(0\cdot 6) = \theta$, तब $\sin\theta = \cdot 6$.

अब $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\cdot 6)(\cdot 8) = \cdot 96$

उदाहरण 36 यदि $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$, तब $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) π (C) 0 (D) $\frac{2\pi}{3}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ है इसलिए

$$\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} y\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}.$$

उदाहरण 37 $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$ का मान है

(A) $\frac{19}{8}$ (B) $\frac{8}{19}$ (C) $\frac{19}{12}$ (D) $\frac{3}{4}$

हल सही उत्तर (A) है। क्योंकि $\tan\left(\cos^{-1}\frac{3}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right) = \tan\left(\tan^{-1}\frac{4}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$$= \tan\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{1}{4}}\right) = \tan\tan^{-1}\left(\frac{19}{8}\right) = \frac{19}{8}.$$

उदाहरण 38 व्यंजक $\sin[\cot^{-1}(\cos(\tan^{-1} 1))]$ का मान है

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

हल सही उत्तर (D) है। क्योंकि

$$\sin\left[\cot^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sin\left[\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sin\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}\right] = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

उदाहरण 39 समीकरण $\tan^{-1}x - \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(A) का काई हल नहीं है (B) का केवल एक मात्र हल है

(C) के अनंत हल हैं (D) के दो हल हैं

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि

$$\tan^{-1}x - \cot^{-1}x = \frac{\pi}{6} \text{ तथा } \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}.$$

इनको जोड़ने पर हमें $2\tan^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ प्राप्त होता है

इसलिए $\Rightarrow \tan^{-1}x = \frac{\pi}{3}$ अर्थात् $x=\sqrt{3}$.

उदाहरण 40 यदि $\alpha \le 2\sin^{-1}x + \cos^{-1}x \le \beta$, तब

(A) $\alpha=\frac{-\pi}{2}, \beta=\frac{\pi}{2}$ (B) $\alpha=0, \beta=\pi$

(C) $\alpha=\frac{-\pi}{2}, \beta=\frac{3\pi}{2}$ (D) $\alpha=0, \beta=2\pi$

हल सही उत्तर (B) है। दिया गया है कि $\frac{-\pi}{2} \le \sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sin^{-1}x + (\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) \le \pi$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le 2\sin^{-1}x + \cos^{-1}x \le \pi$$

उदाहरण 41 $\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\text{cosec}^{-1}3)$ का मान है

(A) 5 (B) 11 (C) 13 (D) 15

हल सही उत्तर (B) है।

$$\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\text{cosec}^{-1}3) = \sec^2(\sec^{-1}2) - 1 + \text{cosec}^2(\text{cosec}^{-1}3) - 1$$

$$= 2^2 \times 1 + 3^2 - 2 = 11.$$

2.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{6}\right)+\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$ का मान निकालिए।

2. $\cos \quad \cos^{-1} \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad +\frac{\pi}{6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए कि $\cot \quad \frac{\pi}{4}-2\cot^{-1}3 \quad =7$.

4. $\tan^{-1} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad + \cot^{-1} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad +\tan^{-1} \quad \sin \quad \frac{-\pi}{2}$ का मान निकालिए।

5. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right)$ का मान निकालिए।

6. दर्शाइए कि $2\tan^{-1}(-3) = \frac{-\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right)$.

7. समीकरण $\tan^{-1}\sqrt{x(x+1)}+\sin^{-1}\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\pi}{2}$. के वास्तविक हल ज्ञात कीजिए।

8. व्यंजक $\sin\left(2\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)+\cos\left(\tan^{-1}2\sqrt{2}\right)$ का मान निकालिए।

9. यदि $2\tan^{-1}(\cos\theta) = \tan^{-1}(2\,\text{cosec}\,\theta)$, तो दिखाइए कि $\theta = \frac{\pi}{4}$.

10. दर्शाइए कि $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)=\sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$.

11. समीकरण $\cos\left(\tan^{-1}x\right)=\sin\left(\cot^{-1}\frac{3}{4}\right)$ को हल कीजिए

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

12. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\cos^{-1}x^2$.

13. $\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\cos x+\dfrac{4}{5}\sin x\right)$, जहाँ $x\in\left[\dfrac{-3\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$, को सरलतम रूप में लिखिए।

14. सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1}\dfrac{8}{17}+\sin^{-1}\dfrac{3}{5}=\sin^{-1}\dfrac{77}{85}$.

15. दर्शाइए कि $\sin^{-1}\dfrac{5}{13}+\cos^{-1}\dfrac{3}{5}=\tan^{-1}\dfrac{63}{16}$.

16. सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\dfrac{1}{4}+\tan^{-1}\dfrac{2}{9}=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

17. $4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$ का मान ज्ञात कीजिए।

18. दर्शाइए कि $\tan\left(\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$ तथा इसका भी औचित्य बताइए कि दूसरा मान $\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}$ को क्यों नहीं लिया गया है।

19. यदि $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ एक समांतर श्रेढ़ी में हैं जिसका सार्व अंतर (common difference) d है तो निम्नलिखित व्यंजक का मान निकालिए।

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_3a_4}\right)+...+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_{n-1}a_n}\right)\right].$$

बहुविकल्पीय प्रश्न (M.C.Q.)

प्रश्न 20 से 37 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही विकल्प चुनिए–

20. निम्न में से कौन सा $\cos^{-1}x$ की मुख्य शाखा है?

(A) $\left[\dfrac{-\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ (B) $(0, \pi)$ (C) $[0, \pi]$ (D) $(0, \pi)-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

21. निम्नलिखित में से कौन सा $\text{cosec}^{-1}x$ की मुख्य शाखा है?

(A) $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

22. यदि $3\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi$, तो x बराबर है

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

23. $\sin^{-1}\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$ का मान है

(A) $\frac{3\pi}{5}$ (B) $\frac{-7\pi}{5}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $\frac{-\pi}{10}$

24. फलन $\cos^{-1}(2x-1)$ का प्रांत है

(A) [0, 1] (B) [–1, 1] (C) (–1, 1) (D) [0, π]

25. $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत है

(A) [1, 2] (B) [–1, 1] (C) [0, 1] (D) इनमें से कोई नहीं

26. यदि $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{5} + \cos^{-1}x\right) = 0$, तो x का मान है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) 0 (D) 1

27. $\sin(2\tan^{-1}(.75))$ का मान है

(A) ·75 (B) 1·5 (C) ·96 (D) sin 1·5

28. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{2}$ (C) $\frac{5\pi}{2}$ (D) $\frac{7\pi}{2}$

29. व्यंजक $2\sec^{-1}2 + \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान है

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{7\pi}{6}$ (D) 1

30. यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{4\pi}{5}$, तो $\cot^{-1} x + \cot^{-1} y$ बराबर है

(A) $\frac{\pi}{5}$ (B) $\frac{2\pi}{5}$ (C) $\frac{3\pi}{5}$ (D) π

31. यदि $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2} + \cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, जहाँ $a, x \in]0, 1$, तब x का मान बराबर है

(A) 0 (B) $\frac{a}{2}$ (C) a (D) $\frac{2a}{1-a^2}$

32. $\cot\left(\cos^{-1}\frac{7}{25}\right)$ का मान है

(A) $\frac{25}{24}$ (B) $\frac{25}{7}$ (C) $\frac{24}{25}$ (D) $\frac{7}{24}$

33. व्यंजक $\tan\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ का मान है

(A) $2+\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}-2$ (C) $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ (D) $5+\sqrt{2}$

[**संकेत** : $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ प्रयुक्त करें]

34. यदि $|x| \le 1$, तब $2\tan^{-1} x + \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ बराबर है

(A) $4\tan^{-1} x$ (B) 0 (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

35. यदि $\cos^{-1}\alpha + \cos^{-1}\beta + \cos^{-1}\gamma = 3\pi$, तब $\alpha(\beta+\gamma) + \beta(\gamma+\alpha) + \gamma(\alpha+\beta)$ बराबर है

(A) 0 (B) 1 (C) 6 (D) 12

36. समीकरण $\sqrt{1+\cos 2x} = \sqrt{2}\cos^{-1}(\cos x)$ in $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ के वास्तविक हलों की संख्या है

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनंत

37. यदि $\cos^{-1}x > \sin^{-1}x$, हो तो

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1$ (B) $0 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $-1 \le x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $x > 0$

प्रश्न 38 से 48 तक रिक्त स्थान भरिए –

38. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ की मुख्य शाखा __________ है।

39. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ का मान __________ है।

40. यदि $\cos(\tan^{-1}x + \cot^{-1}\sqrt{3}) = 0$, तब x का मान __________ है।

41. $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ के मानों का समुच्चय __________ है।

42. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ का मुख्य मान __________ है।

43. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{14\pi}{3}\right)$ का मान __________ है।

44. $\cos(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$, $|x| \le 1$ का मान __________ है।

45. व्यंजक $\tan\left(\frac{\sin^{-1}x + \cos^{-1}x}{2}\right)$, जहाँ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है, का मान __________ है।

46. यदि x के सभी मानों के लिए $y = 2\tan^{-1}x + \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ तब _____ $< y <$ _____.

47. परिणाम $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ तभी सत्य है जब xy ______ है।

48. सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\cot^{-1}(-x)$ का मान $\cot^{-1}x$ के पद में ________ है।

प्रश्न 49 से 55 तक प्रत्येक में दिए गए कथन को बताइए कि वह सत्य है या असत्य–

49. प्रत्येक त्रिकोणमितीय फलन का उनके संगत प्रांतों में प्रतिलोम फलन का अस्तित्व होता है।

50. व्यंजक $(\cos^{-1} x)^2$ का मान $\sec^2 x$ के बराबर है।

51. त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांतों का उनकी किसी भी शाखा (आवश्यक नहीं कि मुख्य शाखा हो) में प्रतिबंधित किया जा सकता है ताकि उनका प्रतिलोम फलन प्राप्त हो सके।

52. θ कोण का न्यूनतम संख्यात्मक मान, चाहे धनात्मक हो या ऋणात्मक, को त्रिकोणमितीय फलन का मुख्य मान कहते हैं।

53. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों का आलेख उनके संगत त्रिकोणमितीय फलन के आलेख में x तथा y अक्ष का परस्पर विनिमय करके प्राप्त किया जा सकता है।

54. n का वह न्यूनतम मान जिसके लिए $\tan^{-1} \frac{n}{\pi} > \frac{\pi}{4}, n \in \mathbf{N}$, के लिए सत्य हो, वह 5 है।

55. $\sin^{-1}\left[\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{3}$ है।